XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

Estructuras tenso compresivas: "El tripie"

Licenciatura en matemáticas- Universidad de Sonora- Unidad Centro
Jesus Erubiel Tadeo Espinoza, M.C. Paola Tonanzy García Mendívil- Dr. Héctor Alfredo Hernández H.

Introducción

Una estructura tenso compresiva es una estructura con elementos que reaccionan a la tensión (cables con poca elasticidad) y otros elementos reaccionan a compresión (segmentos rígidos).
Estas estructuras son la base para realizar construcciones ligeras y muy resistentes, los cables pueden ser de acero y delgados y los segmentos rígidos pueden ser tubos de aluminio. De hecho esta es la primera opción que se considera para realizar construcciones extraterrestres, por las facilidades para ser transportadas. En este trabajo se presenta el diseño de una estructura, que requiere cálculo de una variable y nociones de geometría en el espacio.

Proceso

El proceso es el siguiente:

- Definición de los elementos involucrados
  1. Determinación del polígonos regulares (n lados) $n = 3$. Sus coordenadas $U_k(r_{inf}\cos(k2\pi/n), r_{inf}\sin(k2\pi/n), 0)$ y $V_k(r_{sup}\cos(k2\pi/n+\theta), r_{sup}\sin(k2\pi/n+\theta), h)$, donde r_{inf} y r_{sup} son los radio que inscriben a los polígonos, y θ es el ángulo que el polígono superior girará, para $k = 0, 1, ..., n-1$.
  2. L es la longitud de los segmentos rígidos.
  3. Coordenadas del polígono superior, su altura estará determinada por L y por el giro θ que se le realizará.
- Determinación de la longitud de los cables del polígono.
- Obtención de la fórmula que mide la longitud de los cables que unen al polígono inferior con el polígono superior. En realidad es más práctico optimizar la distancia cuadrada (no afecta el proceso, dada la monotonía de $f(x) = x^2$)
- Resultados finales, con observaciones

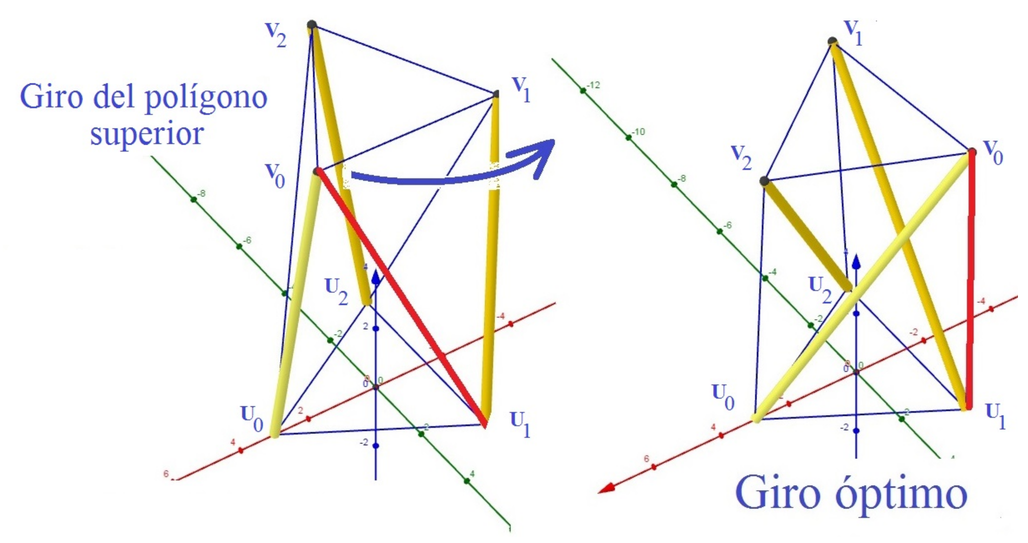
Definiciones

Variables a utilizar:

- n: número de lados del polígono.
- r_{inf}: radio del polígono inferior.
- r_{sup}: radio del polígono superior.
- L: longitud de segmentos rígidos.
- ℓ: longitud del lado del polígono.
- w: longitud cuadrada de cable que une a los polígonos (cable rojo).
- U_0, U_1, U_2: vectores de vértices inferiores.
- V_0, V_1, V_2: vectores de vértices superiores.
- θ: ángulo de giro entre los polígonos.

Dibujos, el tripié

Esta es la estructura tenso compresiva más sencilla.



A medida que el triángulo superior gira, disminuye su altura y la longitud del cable rojo varia. Y llega un momento en que ésta longitud empieza a aumentar. El problema es determinar el valor de θ de tal manera que ésta longitud es mínima.

Cálculos

Nótese que $\|V_0 - U_0\|^2 = L^2$ $\qquad \|V_0 - U_0\|^2 = \|(r_{sup}Cos\theta - r_{inf}, r_{sup}Sen\theta, h)\|^2$

$$= (r_{sup}Cos\theta - r_{inf})^2 + (r_{sup}Sin\theta)^2 + h^2$$
$$= r_{sup}^2Cos^2\theta - 2r_{inf}r_{sup}Cos\theta + r_{inf}^2 + r_{sup}^2Sen^2\theta + h^2$$
$$= r_{inf}^2 + r_{sup}^2 - 2r_{inf}r_{sup}Cos\theta + h^2 = L^2$$
$$\Rightarrow h^2 = L^2 + 2r_{inf}r_{sup}Cos\theta - (r_{inf}^2 + r_{sup}^2)$$

$$w = \|V_0 - U_1\|^2$$
$$= \|(r_{sup}Cos\theta, r_{sup}Sen\theta, h) - (r_{inf}Cos(2\pi/n), r_{inf}Sin(2\pi/n) - r_{inf}Sin(2\pi/n), 0)\|^2$$
$$= \|(r_{sup}Cos\theta - r_{inf}Cos(2\pi/n), r_{sup}Sen\theta - r_{inf}Sin(2\pi/n), h)\|^2$$
$$= ((r_{sup}Cos\theta - r_{inf}Cos(2\pi/n))^2 + (r_{sup}Sin\theta - r_{inf}Sin(2\pi/n))^2 + h^2$$
$$= r_{sup}^2Cos^2\theta - 2r_{inf}r_{sup}Cos\theta Cos(2\pi/n) + r_{inf}^2Cos^2(2\pi/n) + r_{sup}^2Sen^2\theta - 2r_{sup}r_{inf}Sen\theta Sen(2\pi/n) + r_{inf}^2Sen^2(2\pi/n) + h^2$$
$$= r_{inf}^2 + r_{sup}^2 - 2r_{inf}r_{sup}(Cos\theta Cos(2\pi/n) + Sen\theta Seno(2\pi/n)) + h^2$$
$$= r_{inf}^2 + r_{sup}^2 - 2r_{inf}r_{sup}Cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{n}\right) + h^2 \quad \text{sustituyendo } h^2$$

$$= r_{inf}^2 + r_{sup}^2 - 2r_{inf}r_{sup}Cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{n}\right) + L^2 + 2r_{inf}r_{sup}Cos\theta - (r_{inf}^2 + r_{sup}^2)$$
$$= L^2 - 2r_{inf}r_{sup}\left(Cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{n}\right) - Cos\theta\right)$$
$$= L^2 + 4r_{inf}r_{sup}Sen\left(\theta - \tfrac{\pi}{n}\right)Sen\left(\tfrac{-\pi}{n}\right)$$
$$= L^2 - 4r_{inf}r_{sup}Sen\left(\theta - \tfrac{\pi}{n}\right)Sen\left(\tfrac{\pi}{n}\right)$$

Derivando a w respecto a θ tenemos:

$$\frac{dw}{d\theta} = -4r_{inf}r_{sup}Sen\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)Sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Igualando a $\frac{dw}{d\theta} = 0$ obtenemos que el menor valor de θ que la resuelve es

$$\theta = \tfrac{\pi(n+2)}{2n}$$

Se puede verificar fácilmente que $\frac{d^2w}{d\theta^2}(\theta) > 0$ por lo tanto w está en su valor mínimo para ese valor de θ

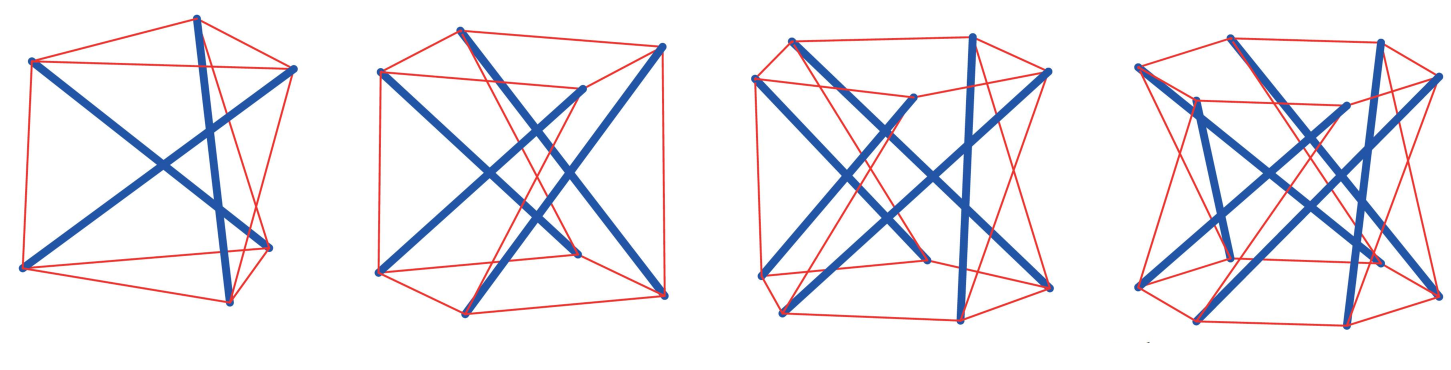
Resultados

- El valor óptimo, que es donde la estructura queda en equilibrio es
$$\theta = \frac{\pi(n+2)}{2n}$$
- El valor óptimo no depende de la longitud de los segmentos rígidos.
- El valor óptimo del ángulo θ tampoco depende de los radios, ni inferior ni superior.
- Para el tripié, θ óptimo es de 150 grados, para otras estructuras similares es $\theta_4 = 135$, $\theta_5 = 126$ y $\theta_6 = 120$ grados.

  Medidas para el tripié

  - L: Longitud del segmento rígido.
  - $r = r_{inf} = r_{sup}$: radio del polígono.
  - Longitud del cable del polígono $\ell = 2rSen\left(\frac{\pi}{3}\right)$
  - Altura del polígono superior
    $h = \sqrt{L^2 + 2r_{inf}r_{sup}Cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - (r_{inf}^2 + r_{sup}^2)}$
  - Longitud cuadrada del cable que une los polígonos
    $w = L^2 - 2r_{inf}r_{sup}\sqrt{3}$

Otras estructuras



El tema de estructuras tenso compresivas (tensegrity structures, en inglés) es muy amplio, existe mucho material gratuito en internet, le invitamos a consultarlo. Destaca como opción para realizar construcciones extras a la tierra.

Referencias

[1] Valentín Gómez Jáuregui. Tensegrity structures and their application to architecture. School of Architecture Queen's University Belfast, 2004.
[2] M. Heller. Tensegrity Models. http://www.chiroweb.com/archives/20/26/07.html, 2002.